Übungsblatt 10

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 21.06.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Sei $f \in C^1([a,b], \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Finden Sie eine Stammfunktion zu $\frac{f'}{f}$, und geben Sie selbst ein sinnvolles Beispiel.

b) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

i) $\int \frac{c}{(x-a)^k} dx$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

ii) $\int \frac{cx+d}{x^2+2ax+b} dx$.

c) Führen Sie die Polynomdivision in Schritt II des Beispiels zur Partialbruchzerlegung aus der Vorlesung aus.

d) Vollziehen Sie alle Schritte der Partialbruchzerlegung des Beispiels nach. (Aufgabenteil d) ohne Bewertung)

Aufgabe 2. (4 Punkte)

a) Wie aus Analysis I bekannt ist, ist $R_n(f, x_0)(x) = f(x) - T_n(f, x_0)$ das Restglied in der Taylorformel für $f \in C^{n+1}(X \subset \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $X \subset \mathbb{R}$ offen. Zeigen Sie, dass das Restglied auch folgende Integraldarstellung besitzt:

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt.$$

b) Finden Sie eine möglichst gute Abschätzung für das Restglied $R_n(f, x_0)(x)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $n \geq 1$ Rekursionsformeln für

i) $\int (\sin x)^n dx$,

ii) $\int (\cos x)^n dx$.

b) Berechnen Sie:

i) $\int_a^b \frac{\log x}{x^2} dx, \qquad$ für $0 < a < b < \infty$

ii) $\int_a^b e^x \cos(2x) dx, \qquad$ für $a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4. (2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \frac{1}{e^x+1} dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{3}x^2 - 2x}} dx$

Aufgabe 5. (2 Punkte)
Beweisen Sie den *Mittelwertsatz in Integralform*:
Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(X, \mathbb{R}^m)$, dann gilt

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y-x))(y-x)dt$$

für $x, y \in X$, so dass die gesamte Verbindungsstrecke zwischen x und y in X liegt. Dabei ist das Integral komponentenweise zu verstehen.