Übungsblatt 11

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 28.06.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (2 Punkte)

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-2\sqrt{n}}$ konvergiert.

b) Existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{1}{4^x} dx$?

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Das Produkt zweier uneigentlich integrierbarer Funktionen ist wieder uneigentlich integrierbar.

d) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx$.

Aufgabe 2. (3 Punkte) Beweisen Sie Satz 8.7 der Vorlesung.

Aufgabe 3. (8 Punkte) *Cantorsches Diskontinuum*
In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass es auch überabzählbare Mengen in $\mathbb{R}$ mit Lebesgue-Maß 0 gibt.

Sei $I_0 = [0,1], I_1^0 = [0, \frac{1}{3}], I_1^2 = [\frac{2}{3}, 1], I_1 = I_1^0 \cup I_1^2$.
Weiter sei $I_2^{00} = [0, \frac{1}{9}], I_2^{02} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], I_2^{20} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], I_2^{22} = [\frac{8}{9}, 1]$ und $I_2 = \bigcup_{\alpha,\beta=0,2} I_2^{\alpha,\beta}$.
Man führt diese Zerlegung im gleichen Stil weiter und definiert das *Cantorsche Diskontinuum* C durch

$$C = \bigcap_{n\geq 0} I_n$$

i) Machen Sie sich anhand einer Zeichnung die Zerlegung des Einheitsintervalls klar.

Beweisen Sie nun:

ii) C ist kompakt und enthält keine Intervalle.

iii) C ist überabzählbar.

iv) C ist eine Lebesgue-Nullmenge.

(Hinweis zu iii): Zeigen Sie, dass die Elemente von C im „Dreier-System“ eine Darstellung der Form $x = \sum_{k\geq 0} a_k 3^{-k}$ mit $a_k \in \{0, 2\}$ erlauben.)

Aufgabe 4. (3 Punkte)

a) Sei $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der Graph $gr(f) \subset \mathbb{R}^2$ von f eine Nullmenge im $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^2$ ist.