

ÜBUNGSBLATT 12

Abgabe in die Briefkästen bis Mittwoch, 05.07.2006, 10 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)

- a) Sei $f_k \in L^1$ mit $\lim f_k = f$ f.ü. . Es existiere außerdem ein $g \in L^1$ mit $|f| \leq g$.
Zeigen Sie, dass dann $f \in L^1$ ist.
- b) Finden Sie eine Situation wie in Aufgabenteil a), so dass $\int f \neq \lim \int f_k$ ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion aus der Vorlesung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in $\mathcal{ML}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ liegt.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht in $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ liegt.

Hinweis für Aufgabe 4 a) und b):
Schreiben Sie

$$\int_0^{a\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{[a]-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{[a]\pi}^{a\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

für $a \in \mathbb{R}$ und schätzen Sie die Folge der

$$a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

geeignet nach unten und oben ab.