Übungsblatt 13

Ohne Abgabe

Aufgabe 1. (Stetige Abhängigkeit des Lebesgue-Integrals von einem Parameter)
Seien $M \subset \mathbb{R}^p, X \subset \mathbb{R}^n$ offen $(m, p \geq 1)$ und $f : M \times X \to \mathbb{R}$ habe folgende Eigenschaften:

a) Für alle $p \in M$ sei $f(p, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.

b) Für fast alle $x \in X$ sei $f(\cdot, x) : M \to \mathbb{R}$ stetig in $p_0 \in M$. (*fast alle* bedeutet hier *fast überall* bzgl. X.)

c) Es existiert eine Umgebung $U \subset M$ von $p_0 \in M$ und ein $g \in L^1(X, \mathbb{R})$, so dass für alle $p \in U$ gilt, dass $|f(p, \cdot)| \leq g$ fast überall.

Zeigen Sie, dass dann die Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ mit

$$F(p) = \int_X f(p, x) dx$$

stetig in p_0 ist.

Bemerkung: Die Aussage ist auch allgemein gültig für einen beliebigen metrischen Raum M.

Aufgabe 2. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $X \subset \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ und $f : I \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.

a) Für alle $t \in I$ sei $f(t, \cdot) : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar.

b) Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$ existiere und sei stetig für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) = I_{t_0} \subset I$ und alle $x \in X$.

c) Es existiere ein $g \in L^1(X, \mathbb{R})$, so dass für alle $t \in I_{t_0}$ gilt:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x) \qquad \text{fast überall.}$$

Zeigen Sie, dass dann $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F(t) = \int\limits_X f(t, x) dx$ in t_0 differenzierbar und es gilt, dass

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) dx.$$

Bemerkung: Unter obigen Voraussetzungen lassen sich also Differentiation und Integration von parameterabhängigen Integralen vertauschen.

Aufgabe 3. Diese Aufgabe befasst sich mit der Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Wegen $\Gamma(n+1) = n!$ (vgl. Schritt 2) für ganzzahlige $n \geq 0$ kann man diese Funktion z. B. als Fortsetzung der Fakultät auf nicht ganzzahlige Argumente aufgefasst werden.

1. Schritt:
Wir überprüfen zuerst die Wohldefiniertheit und Stetigkeit der Gammafunktion.

a) Seien $\alpha, M > 0$ beliebig und

$$f(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}, & 0 < t < 1, \\ Me^{-\frac{t}{2}} & 1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f \in L^1((0,\infty),\mathbb{R})$ ist.
(Hinweis: Betrachten Sie $f \cdot \chi_{[\frac{1}{n},n]}$, verwenden Sie den Zusammenhang zwischen Regel- und Lebesgue-integrierbaren Funktionen und wenden Sie den Satz von Beppo-Levi an.)

b) Sei $0 < \alpha < \beta$. Zeigen Sie: Bei geeigneter Wahl von M ist $f(t)$ eine Majorante von $g(t) = e^{-t}t^{x-1}$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. Folgern Sie hieraus die Wohldefiniertheit von Γ.

c) Weisen Sie die Stetigkeit von Γ nach. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.)

2. Schritt:

a) Beweisen Sie die Rekursionsformel

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

mit Hilfe partieller Integration von $\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}t^{x-1}dt$.
(Beachten Sie, dass wir die partielle Integration nur für Regelfunktionen auf kompakten Intervallen kennen.)
Folgen Sie, dass

$$\Gamma(n+1) = n!$$

b) Unter der Voraussetzung, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (Der Beweis folgt in der Vorlesung!), sollen Sie noch zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2}.$$

Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie, dass sich mit wachsender Dimension n das Volumen der n-dimensionalen Sphäre an ihrem Rand konzentriert. D.h. zeigen Sie, dass für festen Radius $R > 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{vol}_n(R-\varepsilon)}{\mathrm{vol}_n(R)} = 0$$

b) Berechnen Sie das Volumen des n-dimensionalen Ellipsoids.

$$\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{\alpha_i})^2 \leq 1\}$$

Aufgabe 5. Wenden Sie in dieser Aufgabe das Prinzip von Cavalieri an:
Schneidet man ein zylindrisches Loch mit Radius r in eine Kugel vom Radius $R > r$, wobei die Zylinderachse durch Nord- und Südpol der Kugel verläuft, so erhält man einen *sphärischen Ring*. Bestimmen Sie das Volumen dieses sphärischen Rings und zeigen Sie, dass die Volumina zweier sphärischer Ringe gleicher Höhe übereinstimmen.
(Hinweis: Wählen Sie als Vergleichskörper eine Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe des sphärischen Rings ist.)

Bemerkung. Einige der Aufgaben können am Freitag, den 7.7. als Präsenzaufgaben dienen.