Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 3. April 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

1. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 7. April 2006, 12.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie das n-te Taylorpolynom $T_n(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ und das Integralrestglied $R_n(x)$.

b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{\sigma \to -1^+} \int\limits_\sigma^1 f(x)\,dx$ exixstiert und berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Das „trigonometrische Polynom“ $q(t) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos(kt)$, $a_k \in \mathbb{R}$, hat mindestens eine Nullstelle in $]0,\pi[$.

Aufgabe 3 *Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung*

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Weiter sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und monoton. Zeigen Sie: Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ d) $\int\limits_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$

e) $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$ f) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$ g) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$