Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 7. April 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

2. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Donnerstag, 13. April 2006, 18.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}}$

Aufgabe 2

Es seien $f, g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = M$ für ein $M > 0$. Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,dx$ konvergiert.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$. Zeigen Sie:

a) Es lässt sich f im Nullpunkt stetig fortsetzen (womit das Integral $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ existiert).

b) Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,dt$ existiert.

c) Zeigen Sie, dass das (sogenannte) Fresnelsche Integral $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ existiert.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1+x}$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $\tilde{c}$ gibt, so dass für alle $x \in [0,1]$ die Restgliedabschätzung $|R_n(x)| \le \dfrac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}$ gilt, indem sie die Abschätzung $\left|\dbinom{\frac{1}{2}}{n}\right| \le \dfrac{c}{n^{3/2}}$ voraussetzen.