UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 20. April 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

4. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 28. April 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls eine geeignete Abschätzung für den Reihenwert an:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+2}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{-k}$

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

b) Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Aufgabe 3

Es sei s der Wert der alternierenden harmonischen Reihe und σ der Wert der Reihe

$$\sigma := \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + ...$$

a) Bestimmen Sie a_{3k}, a_{3k+1} und a_{3k+2}.

b) Zeigen Sie $\sigma = \dfrac{s}{2}$, indem Sie $\sum\limits_{k=0}^{3n+2} a_k$ auswerten und $\frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1} \to \frac{s}{2}$ berücksichtigen.

Aufgabe 4

a) Es sei (a_n) eine Nullfolge und $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{3n} a_k = s$. Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$

b) Geben Sie für die alternierende harmonische Reihe die ersten 8 Glieder einer Umordnung an, deren Wert $\frac{3}{4}$ ist.