Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 26. April 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

5. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 5.Mai 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

a) Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen. Zeigen oder widerlegen Sie:

1) Ist $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

2) Ist $a := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ und $a_n \geq c > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.

3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

b) Gegeben sei die Folge (a_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

1) Bestimmen Sie den Limes superior und den Limes Inferior der Folge (a_n).

2) Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge (a_n).

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist $a_n \leq c_n \leq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ und ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ divergent, so ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

b) Es gebe ein $\alpha > 1$ so, dass die Folge $(n^\alpha a_n)$ beschränkt ist. Dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie für folgende (a_n) jeweils die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auf absolute Konvergenz:

a) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ b) $a_n = \dfrac{1}{7^n}\dbinom{3n}{n}$ c) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n n!}$

d) $a_n = \dfrac{3n}{n^3 + 2n - 1}$ e) $a_n = 2^{(-1)^n - n}$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie folgende Reihen auf absolute Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Reihenwert.

a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{5\cdot 3^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+2}{n}^{-\frac{1}{n}}$