Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 18.Mai 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

8. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 26.Mai 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz in I. Bestimmen Sie die Grenzfunktion.

a) $f_n(x) = nxe^{-nx}, \quad I = [0, \infty[$

b) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^3}, \quad I = [q, 1] \quad (0 < q < 1)$ bzw. $I = [0, 1]$

c) $f_n(x) = \begin{cases} nx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & , \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & , \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad I = [0, 2]$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf punktweise und gleichmäšige Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ in $\mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ in $\mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$ in $I = [q, \infty[\quad (q > 0)$

Zusatz zu b): Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe absolut konvergent?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

a) Bestimmen Sie die zu f gehörige Taylorreihe für den Nullpunkt.

b) Für welche x stimmt die Taylorreihe mit f überein?

c) Wo liegt gleichmäßige Konvergenz vor?

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind:

a) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ b) $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \cos kx}{k!}$

Hinweis: Betrachten Sie in b) zunächst die Intervalle $[-q, q]$, $q > 0$.