Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 22.Mai 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

9. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 2.Juni 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Konvergenzintervalle folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(1+a^2)^n} \quad (a \in \mathbb{R})$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a a^n} \quad (a > 0)$

Konvergieren die Reihen auch in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls?

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{(3+2(-1)^n)n} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-1)^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{8^n+5} x^{3n+1}$

Wo liegt gleichmäßige Konvergenz vor?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils die Taylorreihe von f in x_0 und deren Konvergenzintervall:

a) $f(x) = \arcsin x,\ x_0 = 0$

b) $f(x) = \sinh x,\ x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$

Wo stimmt jeweils die Taylorreihe mit der Funktion überein?

Aufgabe 4 *(Etwas lineare Algebra?)*

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren $C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$.

a) Zeigen Sie: $C([a,b])$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

b) Zeigen Sie: Die Abbildung $Int : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $Int(f) := \int\limits_a^b f(x)dx$ ist eine lineare Abbildung.

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $\beta : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $\beta(f,g) := \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ definert ein Skalarprodukt auf $C([a,b])$.

d) Zeigen Sie: Die Abbildung Int ist surjektiv, aber nicht injektiv.