

Analysis II für Lehramt Gymnasium

10. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 9. Juni 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

a) Beschreiben und skizzieren Sie $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für $p = 1, 2, \infty$.

Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei $\|x\| = 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$.

b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^2 ist.

c) Berechnen und skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$.

d) Bestimmen Sie $a, b > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $a\|x\|_2 \leq \|x\| \leq b\|x\|_2$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Folge $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3}) := ((-1)^k, (1 - \frac{1}{n})^n, (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}})$ in \mathbb{R}^3 .

a) Zeigen Sie, dass die Folge (x_k) beschränkt ist.

b) Finden Sie alle konvergenten Teilfolgen von (x_k) an und bestimmen Sie deren Grenzwerte!

Aufgabe 3

Überlegen Sie sich, dass

$$C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig} \}$$

und

$$C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : f \text{ ist beschränkt} \}$$

zwei \mathbb{R} -Vektorräume sind. (Ohne Abgabe!)

a) Zeigen Sie: $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ definiert eine Norm auf $C_b(\mathbb{R})$.

b) Gegeben sei die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n(x) := \frac{2(n+1)^2 x^3 - x}{1 + (n+1)^2 x^2}$. Zeigen Sie: Es gibt ein $f \in C(\mathbb{R})$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

c) Was bedeutet das in unserer bisherigen Sprechweise?

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$.

- a) Zeigen Sie: Es gilt nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\infty = 0$.
- b) Zeigen Sie: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = 0$.
- c) Folgern Sie: Es gibt keine Konstante $c > 0$, so dass für alle $f \in C([0, 1])$ gilt:
 $\|f\|_\infty \leq c \|f\|_2$.
(Das heißt: Die Maximumnorm und die L^2 -Norm sind nicht äquivalent auf $C([0, 1])$.)
- d) Folgern Sie weiter: $C([0, 1])$ ist nicht endlich-dimensional.