UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 7.Juni 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

11. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 16.Juni 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 *(Metrik des französischen Eisenbahnsystems)*

Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden durch 0 liegen.} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen und skizzieren Sie $K_r(1,0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,(1,0)) < r\}$ für $r = \frac{1}{2}, 2$.

Aufgabe 2

a) Es sei $A \subset X$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie:

1) $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von A, wenn $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.
2) $x \in A$ ist genau dann ein isolierter Punkt von A, wenn $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$.

b) Bestimmen Sie jeweils M°, $\overline{M}$, ∂M und die Menge aller isolierten Punkte von M. Ist M offen? Ist M abgeschlossen?

1) $M = (\,]-1,2] \cap [2,3[\,) \cup]3,4]$
2) $M = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 > 1,\ x_1 \neq 0\}$

Aufgabe 3

Es seien A, B nichtleere Teilmengen von X. Zeigen Sie:

a) Die Mengen $\overline{A}$ und ∂A sind abgeschlossen.

b) Ist $A \subset B$ und A offen, so gilt $A \subset B^\circ$.

Aufgabe 4

Es sei $A := \left\{ \left(x, x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\}$ und $B := \left\{ (r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi : r(\varphi) = \frac{\varphi}{1+\varphi}, \varphi > 0 \right\}$.

a) Skizzieren Sie die Mengen A und B.

b) Bestimmen Sie ∂A und ∂B.

c) Begründen Sie, ob die Mengen A und B abgeschlossen bzw. offen sind.