

Analysis II für Lehramt Gymnasium

12. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 23. Juni 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Es sei X ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie:

- X ist vollständig.
- $A \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

existieren, und berechnen Sie diese ggf. Ist f stetig? Läßt sich f in $(0, 0)$ stetig ergänzen?

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + (x - y)^2} \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{\cos(xy) - 1}{x^4 + y^4} \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2}$$

Aufgabe 3

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$\text{i) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(e^y - 1)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{ii) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y} & , y \neq 0 \\ x & , y = 0 \end{cases}$$

b) Für welche $\alpha > 0$ läßt sich $g(x) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{\|x\|_2^\alpha}$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$) in 0 stetig fortsetzen?

Aufgabe 4

Es seien $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, e_ν , $\nu = 1, \dots, n$, die Einheitsvektoren des \mathbb{R}^n und E_j , $j = 1, \dots, m$, die Einheitsvektoren des \mathbb{R}^m .

- Beschreiben Sie $T(e_\nu)$ als Linearkombination der E_j und zeigen Sie, dass es eine (m, n) -Matrix A gibt mit $T(x) = Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$.
- Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$: $\|T(x)\|_2 \leq \max_{\nu=1, \dots, n} \|T(e_\nu)\|_2 \|x\|_1$

Aufgabe 5 *

Es sei $X := C([0, \pi])$ versehen mit der L_2 -Norm $\|f\|_2 = \left(\int_0^\pi f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Weiter sei $B := \{f \in X : \|f\|_2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X .

- a) Zeigen Sie, dass B beschränkt und abgeschlossen ist, aber nicht kompakt.
- b) Zeigen Sie, dass X nicht vollständig ist.

Bemerkung: Aufgabe 5 ist eine freiwillige Zusatzaufgabe. Bearbeitungen (nur zu dieser Aufgabe!) bitte in Briefkasten Nr.30 einwerfen. Punkte werden für diese Aufgabe nicht verteilt.