Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 22.Juni 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

13. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 30.Juni 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

a) Es sei $\| \ \|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:
Die Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$ ist stetig (bzgl. $\| \ \|_2$).

b) Zeigen Sie: Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^m$ sind äquivalent.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie: f ist auf $M := (\,]-17,17[\, \times\,]-17,17[\,) \backslash (\,]-\pi,\pi[\, \times\,]-\pi,\pi[\,)$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie: Die Menge $A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : \dfrac{x(y^2+z^2)\sin(z)}{(x^2+1)(x^2+(y^2+z^2)^2)} < 1 \right\}$ ist offen in $\mathbb{R}^3$.

b) Zeigen Sie: Ist $f : \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1 \right\} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die Nullstellenmenge von f kompakt.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := 5 - x^2 - y^2$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f.

b) Bestimmen Sie die Tangentialebene von f in den Punkten $(0,0,5)$ und $(1,2,0)$. Geben Sie jeweils den Normalenvektor der Ebene an.