Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. K. Menke

Dortmund, 29.Juni 2006

Analysis II für Lehramt Gymnasium

14. Übungsblatt, SS 2006

Abgabe bis Freitag, 7.Juli 2006, 10.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 *Polarkoordinaten*

Gegeben seien die Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$.

a) Bestimmen Sie die Ableitung von g.

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(r, \varphi) := f(g\,(r, \varphi))$.

c) Es sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar und $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v(r, \varphi) := u(g\,(r, \varphi))$. Zeigen Sie:

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}\,v_r + \frac{1}{r^2}\,v_{\varphi\varphi}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int\limits_{x^2}^{x} e^{(x+y)^2}\,dy$. Bestimmen Sie

a) Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ so, dass $F(x) = f(g(x))$ gilt, und

b) mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von F.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 2x^3 + 3e^{2y} - 6xe^y$. Bestimmen Sie

a) die Richtungsableitung von f in Richtung $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ und

b) alle lokalen Extrema. Liegt ein globales Minimum vor?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^2(2 - y) - y^3 + 3y^2 + 9y$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) := 2(y - 3)^2 - 5(x + 2)^3$