Gewöhnliche Differentialgleichungen (So 06)
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 5: Zu einer stetig differenzierbaren Funktion $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die überall $\frac{\partial q}{\partial \alpha}(\alpha, x) \neq 0$ gilt, bestimme man eine Differentialgleichung derart, daß deren Lösungskurven die Kurven der Schar $y = q(\alpha, x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ stets senkrecht schneiden. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis rechnerisch und graphisch an Hand der Parabelschar $y = \alpha + x^2, \alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: Machen Sie sich klar, daß die sogenannte *logistische Differentialgleichung*

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2, \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0$$

ein mögliches Modell für die zeitliche Entwicklung einer einzelnen Population darstellt. Welche Rolle spielen dabei die Parameter α und β? Berechnen Sie die konstanten Lösungen dieser Gleichung und verifizieren Sie, daß für jedes $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ und $\xi \geq 0$ die Funktion

$$\lambda_{\alpha,\beta,\xi}(t) := \frac{\alpha\xi}{\beta\xi + (\alpha - \beta\xi)e^{-\alpha t}}$$

auf $[0, \infty)$ definiert und dort eine Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = \xi$ ist. Interpretieren Sie das Ergebnis (insbesondere für $t \to \infty$) in Abhängigkeit von den Parametern α, β und vom Anfangswert ξ.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, & u(1) &= 1, \\ \dot{v} &= \tfrac{1}{t}v - \tfrac{2}{t^2}u + \tfrac{1}{t}, & v(1) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Für welche $\omega \in \mathbb{R}$ besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = -1$$

nach dem gegenwärtigen Kenntnisstand mehr als eine Lösung auf dem Intervall $[0, \omega]$? Wieviele Lösungen gibt es jeweils?