Gewöhnliche Differentialgleichungen (So 06)
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, & x(0) &= -1, \\ \dot{y} &= x - y, & y(0) &= 0, \\ \dot{z} &= y + e^{-t}, & z(0) &= 0 \end{aligned}$$

mittels Picard-Iteration analog zu Beispiel 2.1.3 aus der Vorlesung.
Hinweis: Berechnen Sie die ersten drei Iterierten entsprechend der Definition (hier Vektoren mit je drei Komponenten), lesen Sie eine allgemeine Bildungsvorschrift für die k-te Iterierte ab und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion, bestimmen Sie die Lösung durch $k \to \infty$.

Aufgabe 10: Zeigen Sie an Hand des Beispiels

$$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2}, \quad x(0) = 0,$$

daß nicht jede Lösung eines Anfangswertproblems mit Hilfe einer Folge von Picard-Iterierten angenähert werden kann.

Aufgabe 11: Es seien λ_k, μ, M, L, α und t_0 wie im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf definiert. Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für alle $k \geq 0$

$$\|\lambda_k(t) - \mu(t)\| \leq ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{für alle } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Aufgabe 12: Bestimmen Sie für $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(t_0) = x_0.$$

Hierzu lösen Sie das Problem mittels Trennung der Variablen und finden maximale Intervalle, in denen die Lösung jeweils existiert.