Gewöhnliche Differentialgleichungen (So 06)
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 17: Gegeben sei die skalare Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf dem offenen Intervall D mit Lipschitz-stetiger rechter Seite.

a) Zeigen Sie, daß alle Lösungen dieser Differentialgleichung monoton sind.

b) Geben Sie ein Beispiel an, daß sowohl streng monoton wachsende als auch streng monoton fallende Lösungen besitzt.

c) Finden Sie ein autonomes System, dessen Lösungskomponenten sämtlich nicht monoton sind.

Aufgabe 18: Finden Sie ein autonomes System zur skalaren Differentialgleichung $\dot{x} = x^2 t$. Geben Sie Lösungen im autonomen bzw. nichtautonomen Fall an. Wieso kann auf die Bedingung $\nu_1(t_0) = t_0$ in Satz 3.1.6 aus der Vorlesung nicht verzichtet werden?

Aufgabe 19: Wir betrachten das zweidimensionale autonome System

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x. \tag{1}$$

a) Der Fluß zu (1) ist $\phi(t;\xi,\eta) = (\xi\cos t + \eta\sin t, \eta\cos t - \xi\sin t)$. Berechnen Sie $\|\phi(t;\xi,\eta)\|$ für beliebige $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ und folgern Sie daraus, welche Trajektorien (1) hat. Zeichnen Sie einige Trajektorien.

b) Überführen Sie (1) in die skalare Differentialgleichung $\ddot{x} = -x$ mit der allgemeinen Lösung $\mu(t;\xi,\eta) = \xi\cos t + \eta\sin t$. Skizzieren Sie einige Lösungskurven und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen aus a).

Aufgabe 20: Skizzieren Sie das Richtungsfeld zu System (1).