Gewöhnliche Differentialgleichungen (So 06)

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 25: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung $\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha$ zum Anfangswert (τ, ξ), indem Sie die exakte Differentialgleichung

$$\dot{x}(1-\alpha)x^{-\alpha}e^{(\alpha-1)A(t)} + (a(t)x + b(t)x^\alpha)(\alpha - 1)x^{-\alpha}e^{(\alpha-1)A(t)} = 0$$

(Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in der Vorlesung) lösen. Insbesondere ist dabei $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$.

Aufgabe 26: Nutzen sie das Ergebnis aus Aufgabe 25, um die konkrete Differentialgleichung $\dot{x} = x + \frac{\sin(t)}{x}$ zu behandeln. Skizzieren Sie die Lösungskurven.

Aufgabe 27: Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \frac{\sin(t)}{t^2}e^{-x} - \frac{2}{t}.$$

Aufgabe 28:

a) Geben Sie eine sinnvolle Transformation für Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = g(\alpha t + \beta x + \gamma)$$

mit $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, $\beta > 0$, an. Wie lautet die transformierte Gleichung? Wie läßt sie sich lösen?

b) Wenden Sie die Transformation aus a) in dem konkreten Fall

$$\dot{x} = 1 - \frac{1}{\cos(x - t + \frac{\pi}{2})}$$

auf einem geeigneten Intervall an.