Gewöhnliche Differentialgleichungen (So 06)

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 33: Gegeben sei (AS) unter $(\mathrm{SV})_5$ in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Das zugehörige System in Polarkoordinaten sei

$$\dot{r} = p(r,\phi), \quad \dot{\phi} = q(r,\phi) \tag{PK}$$

Beweisen Sie: Ist $\mu = (\mu_1, \mu_2) : I \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (PK), so löst das auf I definierte Paar

$$(\nu_1(t), \nu_2(t)) := (\mu_1(t)\cos(\mu_2(t)), \mu_1(t)\sin(\mu_2(t)))$$

das System (AS).

Aufgabe 34: Schreiben Sie das System $\dot{r} = r(1-r^2),\ \dot{\phi} = -1$ aus Beispiel 5.2.3 gemäß Satz 5.1.1 in ein Anfangswertproblem für $r = r(\phi)$ um. Geben Sie die Lösung $\lambda(\phi; \phi_0, r_0)$ hierzu an und untersuchen Sie, für welche r_0 die Lösung eine endliche Entweichzeit hat. Skizzieren Sie das Phasenportrait in (ϕ, r)- und (x,y)-Koordinaten.

Aufgabe 35: Klassifizieren Sie die linearen Systeme aus Kapitel 5.3 dahingehend, ob sie ein erstes Integral auf dem $\mathbb{R}^2$ besitzen oder sogar hamiltonsch sind.

Aufgabe 36: Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $\dot{x} = x + y,\ \dot{y} = 2y$.