Gewöhnliche Differentialgleichungen (So 06)
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 37: Sei $\hat{\mu}_g \in L(g)$ beliebig aber fest und

$$M := \{\hat{\mu}_g + \mu_0 \mid \mu_0 \in L(0)\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Superpositionsprinzips, daß $M = L(g)$.

Aufgabe 38: Wir betrachten in $I := (0, \infty)$ das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2}{t^2}x + \frac{2+2t+t^2}{t^2}y, \\ \dot{y} &= -\frac{2}{t^2}x + \frac{2+2t}{t^2}y. \end{aligned} \tag{A}$$

Zeigen Sie, daß die zwei Funktionen $\mu_1(t) := \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mu_2(t) := \begin{pmatrix} 2t+t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ linear unabhängige Lösungen von (A) sind.

Aufgabe 39: Bestimmen Sie die Spur der Matrix aus Problem (A) und finden Sie eine Wronski-Determinante über die Differentialgleichung

$$\dot{w} = \operatorname{spur} A(t) w.$$

Aufgabe 40: Wir betrachten sowohl für $I_1 := (-\infty, 0)$ als auch für $I_2 := (0, \infty)$ das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{B}$$

Zeigen Sie, daß $\Phi(t) := \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$ Fundamentalmatrix von (B) ist für I_1 und I_2. Finden Sie die Übergangsmatrix von (B).