

1. Übungsblatt zu Funktionentheorie I

SS 2006, 05.04.2006

Aufgabe 1 Antipodenpunkte liegen sich auf der Zahlenkugel gegenüber.

- Es seien $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass genau dann, wenn die entsprechenden Punkte auf der Zahlenkugel Antipodenpunkte sind, $a\bar{b} = -1$ gilt.
- Bestimmen Sie alle Möbiustransformationen T mit $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ und $ad - bc = 1$ die Antipodenpunkte in Antipodenpunkte überführen. (Nach Aufgabenteil a) muss also $T(z)\overline{T(-1/\bar{z})} = -1$ gelten.)

Aufgabe 2 Es sei $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ eine Möbiustransformation. Zeigen Sie

- Berechnen Sie T^{-1} .
- Fixiert eine Möbiustransformation T drei verschiedene Punkte, so gilt $T(z) = z$.

Aufgabe 3 Es sei $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$ und T durch $T(z) = \frac{i(i - z - 1)}{i + z - 1}$ definiert.

- Skizzieren Sie E .
- Zeigen Sie, dass T eine Möbiustransformation ist.
- Skizzieren Sie $T(E)$.

Aufgabe 4 Die Möbiustransformation S sei durch $S(z) = (i + 1)\frac{z - 1}{iz - 1}$ definiert und es sei $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$ und $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| < 1\}$.

- Skizzieren Sie D_1 und D_2 .
- Bestimmen (und skizzieren) Sie $S(D_1)$, $S(D_2)$ und $S(D_1 \setminus D_2)$.