Prof. Dr. Norbert Steinmetz
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

3. Übungsblatt zu Funktionentheorie I
SS 2006, 19.04.2006

Aufgabe 9 Untersuchen Sie, ob jeweils eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f existiert, so dass für jede natürliche Zahl $n \geq 2$

a) $f\left(\frac{i^n}{n}\right) = \frac{1}{n}$

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$

c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$

d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1-n}{1+in}$

gilt.

Aufgabe 10 Es sei $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und f eine ganze Funktion. Für $|z| > 1$ gelte $|f(z)| \leq A|z|^n$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

Aufgabe 11 Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Es existiert ein $c \in \overline{\mathbb{D}}$ mit $f(z) = cg(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 12 Es seien f, g Funktionen und $z_0 \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie folgende Formel aus der Vorlesung für die Ordnung einer Pol/Nullstelle:

$$\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g)$$

Aufgabe 13 Bestimmen und identifizieren Sie den Typ (und bei Polstellen die Ordnung) aller Singularitäten der folgenden Funktionen. Beachten Sie auch den Punkt ∞.

a) $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$

b) $f(z) = \frac{z^2}{e^{z^3} - 1}$

c) $f(z) = \frac{1}{\sin(z + \frac{1}{z})}$

d) $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

Abgabe: Montag, 24.04.2006, bis 10:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 36 im Mathematik-Foyer.