Prof. Dr. Norbert Steinmetz
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

5. Übungsblatt zu Funktionentheorie I
SS 2006, 3.5.2006

Aufgabe 19 Es sei f holomorph in $\mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ und $|\operatorname{Im} f(z)| < \frac{\pi}{2}$ für $z \in \mathbb{D}$. (Hinweis: Es gilt $\log \dfrac{1+z}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \dfrac{z^{2k+1}}{2k+1}$):

a) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{D}$ die Abschätzung $|f(z)| \le \log \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$ gilt.

b) Geben Sie eine Abschätzung für $|f'(0)|$ an.

Aufgabe 20

a) Zeigen Sie, dass alle konformen Abbildungen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ Drehungen sind.

b) Es seien $g, h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung mit $g(0) = h(0)$. Zeigen Sie, dass $f = e^{i\alpha} g$ ist, für ein $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Es sei $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine konforme Abbildung. Zeigen Sie, dass eine Möbiustransformation T und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit $g(z) = e^{i\alpha} T(z)$ für $z \in \mathbb{D}$.

Aufgabe 21 Es seien f, g holomorphe, nullstellenfreie Abbildungen in $\mathbb{D}$ die in $\overline{\mathbb{D}}$ stetig sind. Für $|z| = 1$ gelte $|f(z)| = |g(z)|$. Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $f = \lambda g$ existiert.

Aufgabe 22 Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f(a) = a$ für ein $a \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass $f(z) = z$ für $z \in \mathbb{D}$ gilt

Aufgabe 23 Es sei u eine in $\mathbb{C}$ harmonische Funktion, $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$ und $\tilde{u}(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Zeigen Sie:

$$\tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \tilde{u}_r = 0$$

Abgabe: Dienstag, 9.5.2006, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 36 im Mathematik-Foyer.