Prof. Dr. Norbert steinmetz
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu Funktionenthorie I

SS 2006, 10.5.2006

Aufgabe 24 Welche der folgenden Abbildungen $f : D \to G$ ist eigentlich?

(a) $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(b) $f(z) = 2 - 2/z$, $D = G = \{z : \text{Im } z > 0\}$ obere Halbebene

(c) $f(z) = e^z$, $D = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(d) $f(z) = cz^d$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $D = G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Aufgabe 25 Es sei $f : D \to G$ eigentlich, $G^* \subset G$ ein Gebiet und D^* eine Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(G^*)$. Zeigen Sie, dass $f : D^* \to G^*$ eigentlich ist. Wenden Sie dies auf $f(z) = z^2 - 1$, $D = G = \mathbb{C}$ und $G^* = \{w : |w| < r\}$ an, d.h. beschreiben Sie die Zusammenhangskomponenten D^* von $f^{-1}(G^*)$ und bestimmen Sie den Grad von $f : D^* \to G^*$ in den Fällen $0 < r < 1$, $r = 1$ und $r > 1$.

Aufgabe 26 Bestimmen Sie das Bild von $\{z : \rho < |z| < r\}$ unter $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, wobei $0 < \rho < 1 < r$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $f : D \to f(D)$ genau für $\rho r = 1$ eigentlich ist. Welchen Grad hat dann f?

Aufgabe 27 Es seien D und $\hat{D}$ Gebiete und $\Phi : D \to \hat{D}$ eine konforme Abbildung. Zeigen Sie, dass jede eigentliche Abbildung $f : D \to D$ in der Form $f = \Phi^{-1} \circ \hat{f} \circ \Phi$ mit einer eigentlichen Abbildung $\hat{f} : \hat{D} \to \hat{D}$ von gleichem Grad geschrieben werden kann. Folger Sie daraus: Die eigentlichen Selbsabbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \text{Im } z > 0\}$ sind rationale Funktionen.

Aufgabe 27* (fortgesetzt) Zeigen Sie: Die eigentlichen Selbstabbildungen von $\mathbb{H}$ haben die Form

$$f(z) = c + c_0 z - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z - \xi_j}$$

mit $c \in \mathbb{R}$, alle $\xi_j \in \mathbb{R}$, alle $c_j \geq 0$ und $\sum_{j=0}^{n} c_j > 0$ (sowohl der Term $c_0 z$ als auch die Summe können entfallen, aber nicht beides).

Abgabe: Dienstag 16.5.2006 bis 12:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 36 im Mathematik-Foyer