Prof. Dr. Norbert Steinmetz
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

7. Übungsblatt zu Funktionentheorie I
SS 2006, 17.05.2006

Aufgabe 28 Es seien $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ und $b_k = \exp\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right) - 1$. Zeigen Sie:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, aber $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ ist divergent.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ist divergent, aber $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$ ist konvergent.

Hinweis: Es gilt $\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(|u|^3)$ und $\exp(u) - 1 = u + \frac{u^2}{2} + O(|u|^3)$ für u$\to$ 0.

Aufgabe 29

a) Es sei f holomorph in $\mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + f(z^n))$ absolut und lokal gleichmäßig in $\mathbb{D}$ konvergiert.

b) Es sei (c_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} c_n > 0$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{Im} c_n}{|c_n|^2} < \infty$. Zeigen Sie, daß

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{c_n}}{c_n} \frac{c_n - z}{\overline{c_n} - z}$$

lokal gleichmäßig in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ konvergiert.

Aufgabe 30 Es sei (p_n) eine Folge von Polynomen vom Grad höchstens d die absolut und lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion ein Polynom vom Grad höchstens d (oder das Nullpoynom) ist.

Aufgabe 31 Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) mit $f_n(z) := ze^{-nz^2}$ in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z^2 > 0\}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Existiert eine Umgebung von 0, in der (f_n) lokal gleichmäßig konvergiert?

Abgabe: Montag, 23.05.2006, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 36 im Mathematik-Foyer.