Prof. Dr. Norbert Steinmetz
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

9. Übungsblatt zu Funktionentheorie I
SS 2006, 31.5.2006

Aufgabe 36 Beweisen Sie die Verdopplungsformel für die Gammafunktion:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

Zeigen Sie:

a) $\dfrac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})} = e^{g(z)}$ ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen

b) $g'' \equiv 0$ (Hinweis: $\left(\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$)

c) $e^{g(z)} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}$ (Hinweis: $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$)

Aufgabe 37 Es sei $f \in C^n[0,1]$ und $F(z) = \displaystyle\int_0^1 f(t)t^{z-1}dt$. Zeigen Sie

a) f ist holomorph in $\operatorname{Re} z > 0$.

b) f hat eine holomorphe Fortsetzung nach $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -n\} \setminus \{0, -1, \ldots, -(n-1)\}$ (Hinweis: partielle Integration oder Satz von Taylor).

c) $z = -\nu$ ist Polstelle genau dann, wenn $f^{\nu}(0) \neq 0$ ist. Sonst ist z hebbar.

Aufgabe 38 Für $\operatorname{Re} s > 1$ sei ζ die Riemannsche Zetafunktion. Zeigen Sie, dass ζ nach $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\} \setminus \{1\}$ fortgesetzt werden kann. Anleitung:

a) $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}(n^{-s} - x^{-s})dx = f(s)$

b) $\left|\displaystyle\int_n^{n+1}(n^{-s} - x^{-s})dx\right| \leq |s|n^{-\operatorname{Re} s - 1}$

c) f ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$ und $|f(s)| \leq |s|\zeta(1 + \operatorname{Re} s)$

Abgabe: Dienstag, 6.6.2006, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 36 im Mathematik-Foyer.