Prof. Dr. Norbert Steinmetz
Martin Hülsmann

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

10. Übungsblatt zu Funktionentheorie I
SS 2006, 7.6.2006

Aufgabe 39 Bestimmen Sie die Laurententwicklung von

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1 + 2i}{(z+1)^2(z-2i)}$$

in $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ und in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

Aufgabe 40 Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit $a_1 = 1, \quad |a_n| \leq 1$ für $n > 1$ und $a_n a_m = a_{nm}$. Es sei f durch

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

definiert. Zeigen Sie

a) Die Reihe konvergiert absolut in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$ und gleichmäßig in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq 1 + \delta\}$ für jedes $\delta \geq 0$.

b) Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt $f(s) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - a_n p_n^{-1}}$. Das Produkt konvergiert absolut und lokal gleichmäßig. ((p_n) sei die Folge der Primzahlen)

c) Es existiert eine in $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ holomorphe Funktion g mit $\log f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n^{-s} + g(s)$ für $\operatorname{Re} s > 1$.

Aufgabe 41 Es sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ mit $a_1 \neq 0$. Für ein σ konvergiere die Reihe in $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma\}$ absolut. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{f(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ gilt und in einer Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \tilde{\sigma}\}$ absolut konvergiert.
Zeigen Sie für die Zetafunktion ζ, dass $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$ gilt, mit $\mu(n) = (-1)^m$, falls n das Produkt von m verschiedenen Primzahlen ist und $\mu = 0$ sonst.
Zeigen Sie ausserdem $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| n^{-s}$.

Abgabe: Dienstag, 13.06.2006, bis 12:00 Uhr, in den Briefkasten Nr. 36 im Mathematik-Foyer.