

11. Übungsblatt zu Funktionentheorie I SS 2006, 21.06.2006

Aufgabe 42 Ermitteln Sie mit dem Satz von Rouché die Anzahl der Nullstellen von

- a) $e^z \cos z + 9z^3$ in \mathbb{D}
- b) $z^4 + 12z^2 + 15z + 1$ in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 43 Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $f_\lambda(z) = \frac{z^3}{1 + \lambda z^4}$.

Zeigen Sie mit dem Satz von Rouché, dass für $|\lambda| < \frac{3}{16}$ und $|w| < 2$

- a) die Gleichung $f_\lambda(z) = w$ genau 3 Lösungen mit $|z| < 2$ hat.
- b) Folgern Sie:
Es gibt ein Gebiet $D \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ mit $f_\lambda : D \xrightarrow{3:1} \{w \in \mathbb{C} : |w| < 2\}$.

Aufgabe 44 Berechnen Sie mit dem Residuensatz den Wert folgender (uneigentlicher) Integrale:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$
- c) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin x} dx$