

## 12. Übungsblatt zu Funktionentheorie I

SS 2006, 28.06.2006

**Aufgabe 45** Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

**Aufgabe 46** Es sei  $f$  holomorph in  $\mathbb{D}$  mit  $|f(z)| \leq q < 1$  für ein  $0 < q < 1$ . Zeigen Sie, dass  $f$  genau einen Fixpunkt hat.

**Aufgabe 47** Finden Sie eine Abbildung, die das Gebiet  $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \text{ und } |z| > 1\}$  konform auf  $\mathbb{D}$  abbildet. (Hinweis: Wie verhält sich  $H$  unter der Abbildung  $z \mapsto \frac{1}{z}$ ?)

**Aufgabe 48** Es sei  $E_n$  das in  $\mathbb{D}$  enthaltene  $n$ -Eck, mit Ecken in den  $n$ -ten Einheitswurzeln und  $\Phi_n$  die konforme Abbildung von  $E_n$  auf  $\mathbb{D}$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) > 0$ .

a) Zeigen Sie, dass für  $\omega_n = e^{2\pi i/n}$  gilt:  $\Phi_n(\omega_n z) = \omega_n \Phi_n(z)$ .

b) Finden Sie eine untere und eine obere Abschätzung von  $|\Phi_n'(0)|$ .

c) Zeigen Sie für die Umkehrfunktion:

$$\Phi_n^{-1}(w) = w \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{nk} \text{ mit } w \in \mathbb{D} \text{ und } a_0 = \frac{1}{\Phi_n'(0)}.$$