Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

## Übungsblatt 01

Abgabe bis Di den 11.04.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.
In dieser ersten Woche Bearbeitung ggf. direkt in die erste Übungsstunde mitbringen.

### Aufgabe 01

a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{2-i}{2+3i},\ \frac{3-2i}{1+4i},\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4,\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10},$$

$$\frac{(2-2i)(1+3i)+(1+i)\overline{(2-3i)}}{(3+i)(1-i)+(2-i)(1+3i)}$$

b) Bestimme alle $n \in \mathbb{N}$, für die gilt $(1+i)^n + (1-i)^n = 0$.

c) Zeige: Sind $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und gilt für $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$, so gilt auch $a_0 + a_1\overline{z} + \cdots + a_n\overline{z}^n = 0$.

### Aufgabe 02

a) Gib alle komplexen Zahlen $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an, für die gilt: $z^3 = 2$. Zeichne die Lösungen in die Gaußsche Zahlenebene.

b) Dieselbe Aufgabe, aber jetzt für die Gleichung $z^4 = -1$.

c) Betrachte die allgemeine Gleichung $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$. Wie sehen die Lösungen aus und was bilden sie geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene?

### Aufgabe 03

Berechne folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

**Aufgabe 04**
Bestimme die Determinante folgender reeller $n \times n$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 05** $(*)$
Es sei $V$ ein Vektorraum der Dimension 3. Wir betrachten den Vektorraum $A(V)$ der alternierenden Bilinearformen $b : V \times V \to K$. Man zeige, dass $A(V)$ ebenfalls die Dimension 3 hat.
(Hinweis: eine Basis von $V$ wählen!)

Bemerkung: diese Aufgabe hat etwas mit dem Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von Vektoren des $\mathbb{R}^3$ zu tun.

**Hinweis:** Die wöchentlichen $*$-Aufgaben gehören nicht zum Pflicht-Programm, sondern beziehen sich z.T. auf zusätzliche Informationen aus der Diplom-Ergänzungsvorlesung. Es handelt sich um ein Zusatz-Angebot, das nur in ausgewählten Diplom-Übungsgruppen besprochen wird.