Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

## Übungsblatt 02

Abgabe bis Di den 18.04.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

**Aufgabe 06**

Sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Wir definieren eine Abbildung $D : K^n \to K$ wie folgt: $D(x) = \det A_x$, wobei man $A_x \in K^{n\times n}$ erhält, indem man in $A$ die erste Spalte durch $x$ ersetzt.

a) Zeige, dass $D$ linear ist. (Vorlesung benutzen!)

b) Bestimme $\operatorname{Kern} D$.

**Aufgabe 07**

Es bezeichne $\mathbb{Z}^{n\times n}$ die Menge der $n \times n$-Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten. Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.
(Bemerkung: $\mathbb{Z}^{n\times n}$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement. Diese Aufgabe handelt von den invertierbaren Elementen (Einheiten) in diesem Ring.)

a) Zeige, dass $\det A$ ganzzahlig ist.

b) Zeige: Es gibt genau dann ein $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $AB = E_n$, wenn $\det A = \pm 1$ ist.

c) Gib eine unendliche Serie von $2\times 2$-Matrizen $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ an, die Determinante 1 haben.

**Aufgabe 08**

a) Zeige ohne Benutzung der Polarkoordinaten, dass jedes $w = a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ eine Quadratwurzel in $\mathbb{C}$ besitzt.

b) Bestimme die Quadratwurzel von $w = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

**Aufgabe 09**

Zeige, dass die Menge $C := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ein Teilring des Ringes $M_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen $2 \times 2$-Matrizen ist (siehe 1.3.10 und 2.4.10), und dass $C$ (als Ring) isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist.

(Bitte wenden.)

**Aufgabe 10** $(*)$
Für Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ definieren wir

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von $A$ heißt *Vandermondesche Determinante*. Zeige, dass gilt

$$\det A = \prod_{1 \leq i < k \leq n} (x_k - x_i).$$