Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 04

Abgabe bis Di den 02.05.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 16
Sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

b) Gib eine Basis $\mathcal{B}$ an, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 17
Sei $K = \mathbb{F}_{11}$ der Körper mit 11 Elementen und sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{11}^{3\times 3}.$$

a) Bestimme das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimme die Menge $\{\vec{x} \in K^3 \mid A\vec{x} = \vec{x}\}$.

c) Bestimme die Eigenwerte von A.

d) Bestimme eine Basis $\mathcal{B}$ von K^3, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 18
Seien $a, b, d \in \mathbb{R}$ und $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Zeige, dass F_A diagonalisierbar ist.

b) Ist $a \neq d$ und $\mathcal{B} = (\vec{v}, \vec{w})$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ Diagonalgestalt hat, so ist $v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 19

a) Gib eine reelle 2×2-Matrix an, die keine (reellen) Eigenwerte hat.

b) Sei $F : V \to V$ eine invertierbare lineare Abbildung. F habe den Eigenwert λ. Dann hat auch F^{-1} einen Eigenwert. Welchen?

Aufgabe 20 $(*)$
Sie $H \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und wie üblich $F_H : K^n \to K^n, \vec{x} \mapsto H\vec{x}$ die zugehörige lineare Abbildung. Sei $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n) \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix, die wir mit dem n-tupel ihrer Spalten identifizieren: B ist also gleichzeitig eine Basis von K^n. Beweise für die Darstellungsmatrix von F_H bezüglich der Basis B die folgende Formel:

$$M_B^B(F_H) = B^{-1}HB\,.$$