Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 05

Abgabe bis Di den 09.05.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 21
Es sei $K = \mathbb{F}_p$ ein endlicher Körper. Betrachte für $p = 2$ und $p = 3$ die lineare Abbildung $F : K^5 \to K^3$ mit $F(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

a) Es seien $\mathcal{E}_3$ die kanonische Basis des K^3 und $\mathcal{E}_5$ die kanonische Basis des K^5. Weitere Basen seien

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right).$$

Bestimme die Darstellungsmatrizen $M^{\mathcal{E}_5}_{\mathcal{E}_3}(F)$, $M^{\mathcal{E}_5}_{\mathcal{B}}(F)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}_3}(F)$ und $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$.

b) Gib Basen $\mathcal{A}_1$ von K^5 und $\mathcal{B}_1$ von K^3 an derart, dass $M^{\mathcal{A}_1}_{\mathcal{B}_1}(F)$ von der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon_i \in \{0, 1\}$$

ist.

c) Gib reguläre Matrizen S, T an, so dass $B = SAT$ gilt.

Aufgabe 22
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_4)$ und W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_5)$. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, die gegeben ist durch

$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich seien $\mathcal{A}' = (a'_1, \dots, a'_4)$ mit $a'_1 = a_1 + a_2,\ a'_2 = a_2 + a_3,\ a'_3 = a_3 + a_4,\ a'_4 = a_4$ und $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_5)$ mit $b'_1 = b_1,\ b'_2 = b_1 + b_2,\ b'_3 = -b_1 + b_3,\ b'_4 = b_1 + b_4,\ b'_5 = b_1 + b_5$.

a) Zeige, dass $\mathcal{A}'$ eine Basis von V und $\mathcal{B}'$ eine Basis von W ist.

b) Bestimme $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'}(F)$, $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}}(F)$ und $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F)$.

Aufgabe 23
Die folgenden Polynome

$$f := X^{10} - X^7 + X^3 + X + 1 \text{ und } g := X^5 + X + 1$$

betrachten wir als Polynome in

(1) $\mathbb{Z}[X]$, (2) $\mathbb{F}_2[X]$, (3) $\mathbb{F}_3[X]$.

Welcher Rest bleibt bei der Division mit Rest von f durch g in dem jeweiligen Polynomring?

Aufgabe 24
Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 25 $(*)$
Formuliere einen allgemeinen Satz, der Aufgabe 21 b) verallgemeinert, und beweise diesen Satz.