Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 06

Abgabe bis Di den 16.05.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 26
Sei A eine reelle 2×2-Matrix, die keine reellen Eigenwerte besitzt. Durch A ist eine Abbildung $F_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ gegeben.

a) Zeige, dass F_A diagonalisierbar ist.

b) Sei jetzt $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass SAS^{-1} Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 27

a) Seien $\lambda, \mu, \nu \in K$ paarweise verschieden. Definiere drei lineare Abbildungen $F_i := F_{D_i}$ wobei

$$D_1 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad D_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad D_2 := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Bestimme für $i = 1, 2, 3$ alle F_i-invarianten Unterräume von K^3.

b) Die gleiche Frage wie in a), jetzt aber für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dabei } a \neq 0.$$

Aufgabe 28
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Sei U ein F-invarianter Untervektorraum. Wir bezeichnen mit $P_{F_{|U}}$ das charakteristische Polynom der Einschränkung $F_{|U} : U \to U$ von F auf U.
Zeige, dass $P_{F_{|U}}$ ein Teiler von P_F ist.

Aufgabe 29
Trigonalisiere folgende Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(Bitte wenden.)

Aufgabe 30 $(*)$
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -a & b & a \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?