Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 07

Abgabe bis Di den 23.05.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 31
Sei $F_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme Basen der Haupträume von F_A und gib die Darstellungsmatrix bezüglich dieser Basen an.

Aufgabe 32
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A definiert eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $F_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Sei weiter $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definiert durch $\sigma(v) = \overline{v}$ für alle $v \in \mathbb{C}^n$. Zeige folgende Aussagen:

a) σ ist eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

b) $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \sigma(x) = x\}$.

c) Ist $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von A, so ist $\sigma_{|\operatorname{Eig}(F_A,\mu)} : \operatorname{Eig}(F_A, \mu) \to \operatorname{Eig}(F_A, \overline{\mu})$ ein $\mathbb{R}$-Isomorphismus.

d) $\operatorname{Eig}(F_A, \mu) \cap \operatorname{Eig}(F_A, \overline{\mu}) = \{0\}$

e) Ist $(a_1, \ldots, a_k)$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\operatorname{Eig}(F_A, \mu)$, so ist $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k))$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\operatorname{Eig}(F_A, \overline{\mu})$ und $(a_1, \ldots, a_k, \sigma(a_1), \ldots \sigma(a_k))$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(F_A, \mu) \oplus \operatorname{Eig}(F_A, \overline{\mu})$.

Aufgabe 33
Sei $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und seien $F, G \in \operatorname{End}(V)$ mit $F \circ G = G \circ F$. Zeige, dass F und G mindestens einen gemeinsamen Eigenvektor besitzen.

Aufgabe 34
Sei $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ mit $A^{10} = 0$. Zeige, dass dann auch $A^5 = 0$ gilt.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 35 $(*)$
Es sei V ein beliebiger Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $F \in \operatorname{End} V$ und $P_F := \pm p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$ die Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Potenzen paarweise verschiedener normierter irreduzibler Polynome p_i. Setze noch $F_i := p_i(F)^{m_i}$ und $V_i := \operatorname{Kern} F_i$.
(Für $p_i = X - \lambda_i$ vom Grad 1 ist also V_i der Hauptraum zum Eigenwert λ_i.)
Zeige folgendes:

a) Jedes V_i ist F-invariant und F_j-invariant für alle j.

b) Die Einschränkung $F_j|V_i$ ist injektiv für $j \neq i$. (Hinweis: Lemma von Bezout für Polynome.)

c) Die Summe der V_i ist direkt.