Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 08

Abgabe bis Di den 30.05.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 36
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Gibt es Beispiele für folgende Situationen? Falls ja, gib eins an. Falls nein, beweise, warum nicht.

a) P_F zerfällt in Linearfaktoren und V besitzt eine Zerlegung in F-invariante Unterräume.

b) P_F zerfällt in Linearfaktoren und V besitzt keine Zerlegung in F-invariante Unterräume.

c) P_F zerfällt nicht in Linearfaktoren und V besitzt eine Zerlegung in F-invariante Unterräume.

d) P_F zerfällt nicht in Linearfaktoren und V besitzt keine Zerlegung in F-invariante Unterräume.

e) F hat keinen Eigenwert und V besitzt eine Zerlegung in F-invariante Unterräume.

f) F hat keinen Eigenwert und V besitzt keine Zerlegung in F-invariante Unterräume.

(Mit einer Zerlegung ist jeweils eine echte Zerlegung gemeint, das heißt, für die entsprechenden Unterräume U soll $U \neq \{0\}$ und $U \neq V$ gelten.)

Aufgabe 37
Gib eine Basis $\mathcal{B}$ an, so dass die Matrix A aus Aufgabe 31 die Jordannormalform hat.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Bitte wenden.)

Aufgabe 38
Seien folgende Matrizen gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist es möglich, die Jordannormalformen von F_A und F_B anzugeben, ohne die verallgemeinerten Eigenräume zu bestimmen? Gib jeweils die möglichen Jordanmatrizen an.

Aufgabe 39(∗)
Sei V endlichdimensional, $F \in \operatorname{End} V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und $\lambda_1 \ldots, \lambda_r$ seine verschiedenen Eigenwerte. Zeige, dass für einen Unterraum $U \subseteq V$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) U ist F-invariant.

(ii) U ist die (direkte) Summe seiner Unterräume $U \cap \operatorname{Eig}(F, \lambda_i),\ i = 1, \ldots, r$.

(iii) U ist die (direkte) Summe von Räumen $U_i,\ i = 1, \ldots, r$, wobei U_i ein beliebiger Unterraum von $\operatorname{Eig}(F, \lambda_i)$ ist.

Teil (iii) liefert also einen kompletten Überblick über alle invarianten Unterräume.

Hinweis: Für die (schwierigste) Implikation (i) ⇒ (ii) verwende man geeignete Produkte der Endomorphismen $F - \lambda_i \operatorname{Id}_V$.

Man wende dieses Ergebnis auf die frühere Aufgabe 27 a) an.