Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 09

Abgabe bis Di den 06.06.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 41

Bestimme die Jordansche Normalenform von $A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 42

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Jordanmatrix. Zeige, dass $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von F_A ist, wenn in A ein Jordanblock $J_s(\lambda)$ vorkommt.

Aufgabe 43

a) Zeige, dass für einen Jordanblock $J_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\operatorname{rang}(J_s^q) = \begin{cases} s-q, & 0 \leq q \leq s \\ 0, & q > s \end{cases} .$$

b) Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Jordanmatrix und seien $\lambda_1 \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von F_A. Für $i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq k$ bezeichne mit μ_{ij} die Anzahl der $J_i(\lambda_k)$-Blöcke. Zeige, dass gilt:

$$\mu_{ij} = \operatorname{rang}(A_j^{i-1}) - 2\operatorname{rang}(A_j^i) + \operatorname{rang}(A_j^{i+1}),$$

wobei $A_j := A - \lambda_j E_n$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 44
Für die folgende symmetrische Matrix A gebe man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an sowie eine orthogonale Matrix S derart, dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist:

$$A := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 9 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 10 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 45$(*)$
Man beweise Satz 3.5.18 der Vorlesung:

Es sei F ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann sind folgende Eigenschaften von F äquivalent:

(i) Jeder F-invariante Unterraum besitzt ein F-invariantes Komplement.

(ii) F ist diagonalisierbar.