Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 10

Abgabe bis Di den 13.06.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 46
Sei folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis $\mathcal{B}$ so, dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A)$ Jordangestalt hat.
Hinweis: Das charakteristische Polynom von A ist $P_A = X^6$ und eine Basis von $\mathrm{Kern}(F_A)$ ist gegeben durch $((1,2,2,1,0,0)^t, (2,1,0,0,0,2)^t)$. .

Aufgabe 47
Sei $F : V \to W$ linear und $F^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung.

a) Zeige, dass für den Kern von F^* gilt

$$\mathrm{Kern}(F^*) = \mathrm{Bild}(F)^{\circ}.$$

b) Seien jetzt V und W endlichdimensional. Folgere aus a), dass $\dim \mathrm{Kern}(F^*) = \dim W - \dim \mathrm{Bild}(F)$ und $\mathrm{rang}\, F^* = \mathrm{rang}\, F$.

c) Beweise mit Hilfe von b), dass für jede Matrix $A \in K^{n\times m}$ der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist.

Aufgabe 48 (für Diplom)
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $U^{\circ} \subseteq V^*$ sein Annulator. Betrachte die Menge

$$\widetilde{U} := \{x \in V \mid \forall \varphi \in U^{\circ} : \varphi(x) = 0\}.$$

Zeige, dass $\widetilde{U}$ ein Unterraum ist und dass $\widetilde{U} = U$ gilt.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 48 (für Lehramt)
Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrix

a) in $\mathbb{F}_2^{7\times 5}$,

b) in $\mathbb{R}^{7\times 5}$.

Es sei $U \subseteq K^7$ ($K = \mathbb{F}_2$ bzw. $K = \mathbb{R}$) der von den Spalten von A erzeugte Unterraum. Bestimme in jedem der beiden Fälle ein homogenes LGS mit U als Lösungsmenge.
(Kurze Erläuterung des Lösungsweges. Wie sieht die Gesamtheit aller Lösungen aus?)

Aufgabe 49

Es sei $V = \mathbb{F}_p^4$ für eine Primzahl p und $U = \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

a) Gib eine Basis von V/U an.

b) Gib eine Basis des Annulators $U^{\circ} \subseteq V^*$ an.

Aufgabe 50($*$)
Seien V und W zwei K-Vektorräume und $F : V \to W$ linear. Sei $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von W. Zeige den Satz 4.1.3 der Vorlesung, nämlich dass für die Darstellungsmatrix der dualen Abbildung F^* bezüglich der dualen Basen gilt $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(F^*) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)^t$.