Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 11

Abgabe bis Di den 20.06.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 51
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Sei $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_k)$ eine Basis von U und $\mathcal{C} = (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$ eine Basis von V. Laut Vorlesung ist dann $\overline{\mathcal{A}} = (\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_l})$ eine Basis von V/U. Sei $F : V \to V$ linear und so, dass U F-invariant ist: $F(U) \subseteq U$. Zeige folgende Aussagen.

a) $\overline{F} : V/U \to V/U$ mit $\overline{F}(\overline{v}) := \overline{F(v)}$ ist eine wohldefinierte lineare Abbildung.

b) Es gilt
$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F_{|U}) & A \\ 0 & M_{\overline{\mathcal{B}}}^{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{F}) \end{pmatrix}$$
mit $A \in K^{k \times l}$.

Aufgabe 52
Überprüfe die folgenden Abbildungen $b : V \times V \to \mathbb{R}$ in dem jeweiligen $\mathbb{R}$-Vektorraum V auf die Eigenschaften symmetrische Bilinearform, nicht-entartet, positiv-definit:

a) In $V = \mathbb{R}^3$ die Abbildung $b(x, y) := x^t A y$ mit $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) In $V = \mathrm{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ die Abbildung $b(f, g) := \max\{|f(x)g(x)| \mid x \in [a, b]\}$.

c) In $V = \mathrm{Pol}_2([0, 1], \mathbb{R})$ (Polynomfunktionen von Grad ≤ 2) die Abbildung $b(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)t\,dt$.

d) In $V = \mathrm{Pol}_2([-1, 1], \mathbb{R})$ die Abbildung $b(f, g) := \int_{-1}^1 f(t)g(t)t\,dt$.

Aufgabe 53

Sei $V := K^{n \times n}$. Zeige für $b : V \times V \to K$ mit $b(A, B) := \mathrm{spur}(A^t B)$ für $A, B \in K^{n \times n}$:

a) b ist eine symmetrische Bilinearform auf $K^{n \times n}$, das sogenannte *Killingprodukt* zweier Matrizen A und B aus $K^{n \times n}$.

b) Bestimme für $V = K^{2\times 2}$ den Orthogonalraum von $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$. Ist dieser ein orthogonales Komplement?

c) Bestimme eine ON-Basis des $K^{2\times 2}$, falls dieses möglich ist.

Aufgabe 54
Wie in der Vorlesung heißen zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ kongruent, falls eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $B = S^t AS$. Zeige, dass die so definierte (Kongruenz-)Relation von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 55$(*)$
Bei der Definition des Begriffs "nicht-entartet" hat man eine "links-rechts-Entscheidung" getroffen. Diese Aufgabe zeigt, dass es hierauf nicht ankommt:

Zeige, dass eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum genau dann nicht-entartet ist (d.h. $b(x, v) = 0\ \forall x \in V \Rightarrow v = 0$), wenn gilt: $b(v, x) = 0\ \forall x \in V \Rightarrow v = 0$.