Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 12

Abgabe bis Di den 27.06.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 56
Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\varphi : V \to \mathbb{R}$ linear. Zeige, ohne den allgemeinen Satz 4.3.12 der Vorlesung zu benutzen, dass es dann einen eindeutigen Vektor $v \in V$ gibt, so dass $\varphi(x) = \langle x, v \rangle$ für alle $x \in V$.
Hinweis: betrachte den Kern von φ.

Aufgabe 57
Auf dem $\mathbb{R}^4$ sei die Bilinearform $b(v, w) = v^t A w$ durch folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Orthogonalräume folgender Unterräume:

a) $U_1 = \mathrm{Lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$,

b) $U_2 = \mathrm{Lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Handelt es sich dabei jeweils um orthogonale Komplemente?
Bestimme auch die Grammatrizen der Einschränkung $b_{|U_i}$ bezüglich obiger Basen. Was fällt dir auf?

(Bitte wenden.)

Aufgabe 58
Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in V^*$. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ist eine Basis von V^*.

(ii) $\operatorname{Kern} \varphi_1 \cap \operatorname{Kern} \varphi_2 \cap \cdots \cap \operatorname{Kern} \varphi_n = \{\mathbf{0}\}$

(iii) Die Abbildung $V \to K^n,\ v \mapsto (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \ldots, \varphi_n(v))^t$ ist bijektiv.

Hinweis: Benutze den von den φ_i erzeugten Unterraum W von V^*.

Aufgabe 59 Diplom
Überprüfe, ob es sich bei der durch $A := \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$ gegebenen Abbildung $b(x, y) := x^t A \overline{y}$ auf dem $\mathbb{C}^3$ um eine hermitesche Form und ggf. um ein komplexes Skalarprodukt handelt.

Aufgabe 59 Lehramt
Zeige für den Verbindungsraum zweier affiner Unterräume eines K-Vektorraumes die folgende Formel:

$$\begin{aligned}&(a_1 + U_1) \vee (a_2 + U_2)\\ &= \begin{cases} a + (U_1 + U_2) & \text{wenn } a \in (a_1 + U_1) \cap (a_2 + U_2) \neq \emptyset \\ a_1 + K(a_2 - a_1) \oplus (U_1 + U_2) & \text{wenn } (a_1 + U_1) \cap (a_2 + U_2) = \emptyset \end{cases}\end{aligned}$$

Hinweis: man kann direkt mit der Definition arbeiten: zu zeigen ist, dass die rechte Seite der kleinste affine Unterraum ist, der $a_1 + U_1$ und $a_2 + U_2$ enthält.

Aufgabe 60$(*)$

a) Es sei V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum. Gib unter Benutzung des Homomorphiesatzes einen kanonischen (d.h. nicht von der Wahl einer Basis abhängigen) Isomorphismus $(V/U)^* \cong U^\circ$ an, wobei wie früher U° den Annulator von U in V^* bezeichnet.

b) Für eine symmetrische Bilinearform b auf V ist der Kern der Abbildung $\widehat{b}: V \to V^*, v \mapsto b(-, v)$ offenbar der Orthogonalraum $V^\perp$ des Gesamtraumes V. Sei V endlich-dimensional. Zeige, dass das Bild genau der Annulator von $V^\perp$ ist.

c) Wende unter den Voraussetzungen von b) den Homomorphiesatz auf die Abbildung $\widehat{b}$ (und ihren Kern) an. Was ist das Ergebnis, wenn man noch a) und b) berücksichtigt?