Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Übungsblatt 13

Abgabe bis Di den 04.07.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 61

Es seien $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1) := \mathrm{AG}(V, K), (\mathcal{P}_2, \mathcal{G}_2) := \mathrm{AG}(W, K)$ affine Räume, $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ eine Abbildung. Zeige folgende Aussagen:

a) Ist φ affin, so gilt für alle $a_0 \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{N}, b_1, \ldots, b_k \in \mathcal{P}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$:

$$\varphi(a_0 + \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k) = \varphi(a_0) + \alpha_1 \varphi'(b_1) + \ldots + \alpha_k \varphi'(b_k).$$

b) φ ist genau dann affin, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_k \in \mathcal{P}$ und $\beta_0, \ldots, b_k \in K$ mit $\sum_{j=0}^{k} \beta_j = 1$ gilt:

$$\varphi(\beta_0 a_0 + \ldots + \beta_k a_k) = \beta_0 \varphi(a_0) + \ldots + \beta_k \varphi(a_k).$$

Aufgabe 62

Es sei $\mathcal{A} := \mathrm{AG}(V, K) := (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der affine Raum über V. Beweise den Strahlensatz, d.h. die folgende Aussage:
Sind $G, H \in \mathcal{G}$ zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt $p \in \mathcal{P}$ schneiden, und $a, b \in G, c, d \in H$ Punkte mit a, b, c, d, p paarweise verschieden, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\overline{a, c}$ ist parallel zu $\overline{b, d}$.

b) $\mathrm{TV}(p, a; b) = \mathrm{TV}(p, c; d)$.

(Man erläutere durch eine Skizze, dass es sich hier tatsächlich um den Strahlensatz handelt.)

(Bitte wenden.)

Aufgabe 63 (Diplom)
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $F \in \mathrm{End}(V)$. Nach der Vorlesung ist die zu F adjungierte Abbildung $F^{ad} \in \mathrm{End}(V)$ definiert durch

$$b(v, F^{ad}(w)) = b(F(v), w) \qquad \text{für alle } v, w \in V.$$

a) Bestimme $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F^{ad})$ mittels der Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ und $G_{\mathcal{B}}(b)$.

b) Sei U ein F-invarianter Unterraum. Zeige, dass dann $U^{\perp}$ F^{ad}-invariant ist.

Aufgabe 64 (Lehramt)
Wir erinnern an die Bezeichnung $\varphi_{\vec{v},A}$ für die affine Abbildung $\vec{x} \mapsto \vec{v} + A\vec{x}$.

a) (Wiederholung) Schreibe die Matrizen R_1, R_2 für die Drehung (um den Nullpunkt) um 60° bzw. 120° explizit hin.

b) Berechne die Fixpunkte der Abbildungen

$$\varphi_{\binom{1}{0},R_1},\ \varphi_{\binom{1}{0},R_2},\ \varphi_{\binom{0}{1},R_1},\ \varphi_{\binom{0}{1},R_2}.$$

Jede der Abbildungen hat genau einen Fixpunkt. Erläutere in einem der Fälle durch eine genaue Zeichnung, dass diese affine Abbildung tatsächlich eine Drehung um diesen Fixpunkt ist.

Aufgabe 65(∗)
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine nicht-entartete Bilinearform. Sei $b' : V \times V \to K$ eine weitere Bilinearform.

a) Zeige, dass eine lineare Abbildung $F : V \to V$ existiert mit

$$b'(v, w) = b(v, F(w)).$$

Dabei ist b' genau dann nicht-entartet, wenn F bijektiv ist.

(Ein kleiner Tipp: Die Abbildungen in den Dualraum sind hilfreich.)

b) Sei b jetzt zusätzlich symmetrisch. Zeige, dass dann b' symmetrisch ist genau dann, wenn F selbstadjungiert bezüglich b ist.