Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer SS 2006

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Übungsblatt 14

Abgabe bis Di den 11.07.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer bzw. in den Übungsgruppen.

Aufgabe 66

Es sei σ die Spiegelung an der Geraden g durch den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die mit der x_1-Achse den Winkel $\frac{\pi}{6}$ einschließt. Schreibe σ in der Form $\varphi_{v,S}$ für zu bestimmendes $v \in \mathbb{R}^2$ und $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Aufgabe 67

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass φ_{v_1,S_1} und φ_{v_2,S_2} Spiegelungen an (affinen) Geraden g_1 bzw. g_2 sind. (g_1 und g_2 sind zu bestimmen.)

b) Zeige, dass $\varphi_{v_1,S_1} \circ \varphi_{v_2,S_2}$ eine Drehung ist. Drehpunkt und -winkel sind zu bestimmen.

Ende der klausurrelevanten Aufgaben!

Aufgabe 68

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, d.h. ein $n-1$-dimensionaler Untervektorraum. Sei weiter $H := v_0 + U$ eine affine Hyperebene, wobei $v_0 \in H^\perp$ gelten soll. Durch $S(v) = 0$ für alle $v \in U$ und $S(v_0) = -v_0$ ist eine eindeutige lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben, die (orthogonale) Spiegelung an U. Sei F_H die entsprechende orthogonale Spiegelung an H.

a) Bestimme $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi_{v,S} = F_H$ die orthogonale Spiegelung an H beschreibt. (Tipp: Einen Fixpunkt von $\varphi_{v,S}$ kann man angeben. Der hilft auch schon weiter.)

b) Sei $G := v_1 + U$ eine weitere, zu H parallele Hyperebene. Was ergibt die Hintereinanderausführung von $F_G \circ F_H$?

(Bitte wenden.)

Aufgabe 69

Wenn man bei affinen Räumen die Rolle der Punkte auch formal von der Rolle der Vektoren trennen will, kann man folgendes definieren: Ein affiner Raum $(\mathcal{P}, V)$ über einem Vektorraum V besteht aus einer Menge $\mathcal{P}$ von „Punkten", sowie einer Abbildung

$$V \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \quad (v, p) \mapsto v \oplus p$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$v \oplus (v' \oplus p) = (v + v') \oplus p \qquad \forall v, v' \in V, p \in \mathcal{P}$$

$$\forall p, q \in \mathcal{P} \quad \text{existiert genau ein } v \in V \text{ mit } q = v \oplus p.$$

(Anschaulich: $v \oplus p$ bilden heißt, den Vektor v am Punkt p anheften / abtragen.)

Die Definition einer affinen Abbildung von $(\mathcal{P}, V)$ nach $(\mathcal{Q}, W)$ überträgt sich unmittelbar auf diese allgemeineren affinen Räume: Es ist eine Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, zu der eine lineare Abbildung $L : V \to W$ existiert mit

$$\varphi(v \oplus p) = L(v) \oplus \varphi(p) \text{ für alle } v \in V, p \in \mathcal{P}.$$

Dabei ist L eindeutig und man definiert $\varphi' := L$.

Jetzt zur eigentlichen Aufgabe. Beweise mit diesen Definitionen die Teile b),c) und d) von Satz 5.1.13.
Tipp: Für festes $p_0 \in \mathcal{P}$ ist die Abbildung $V \to \mathcal{P}, v \mapsto v \oplus p_0$ bijektiv.