

Prof. Dr. Martin Skutella  
Ronald Koch, Alexia Weber

**1. Übungsblatt:**  
**Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra**  
**(Lineare Optimierung)**

**Abgabe: 13.04.2006** (vor der Vorlesung)

**Aufgabe 1** (3 + 3 + 2 Punkte)

Ein Unternehmen produziert zwei Arten von Cerealien (A und B), die aus Nüssen, Hafer und Rosinen hergestellt werden. Eine Einheit Cerealien vom Typ A besteht aus zwei Einheiten Nüssen, vier Einheiten Hafer und eine Einheit Rosinen. Eine Einheit Cerealien vom Typ B besteht aus drei Einheiten Nüssen, einer Einheit Hafer und einer Einheit Rosinen. Der Verkauf einer Einheit A bringt dem Unternehmen 5€ ein, der Verkauf einer Einheit B 4€. Das Unternehmen kann maximal 12000 Einheiten Nüsse, 16000 Einheiten Hafer und 4300 Einheiten Rosinen erwerben.

- a) Formuliere das Problem der Berechnung eines Produktionsprogrammes zur Profitmaximierung als lineares Programm.
- b) Löse das lineare Programm graphisch.
- c) Wie ändert sich das optimale Produktionsprogramm, wenn das Unternehmen aufgrund von Belieferungsproblemen nur 10000 Einheiten Nüsse und 4000 Einheiten Rosinen erwerben kann?

**Aufgabe 2** (3 + 3 Punkte)

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem: Ein Stahlwerk erhält drei dringende Bestellung für U, T, I und V Schnitte. Zur Produktion dieser Schnitte gibt es drei Walzen. In der folgenden Tabelle sind die bestellten Mengen der Schnitte, die Kapazitäten der Walzen und die Bearbeitungszeit für eine Tonne eines jeden Schnittes auf jeder Walze gegeben.

Walze	Bearbeitungszeit (in Stunden pro Tonne)				Kapazität (in Stunden)
	U	T	I	V	
A	2	3	5	4	400
B	4	5	5	3	400
C	3	4	6	5	400
bestellte Menge (in Tonnen)	100	50	80	60	

Wir wollen den Zeitaufwand minimieren.

- a) Erstelle ein mathematisches Modell für das Optimierungsproblem.
- b) Finde einen guten Produktionsplan auf heuristische Art.

**Aufgabe 3**

(1 + 2 + 5 Punkte)

a) Schreibe die folgende Mengen unter Benutzung linearer Ungleichungen:

i.

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

ii.

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}$$

b) Schreibe das folgende Problem als lineares Programm:

$$\min \{ \max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + c_0, \mathbf{d}^T \mathbf{x} + d_0 \} \mid A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \}$$

**Aufgabe 4**

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Gib notwendige und hinreichende Kriterien an  $s$  und  $t$  an, so dass das folgende lineare Programm

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && x_1 + x_2 \\ & \text{subject to} && sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) mindestens eine Optimallösung hat,      c) keine zulässige Lösung hat,  
b) genau eine Optimallösung hat,      d) unbeschränkt ist.