Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

2. Übungsblatt: Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Abgabe: 19.04.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Löst folgendes lineares Programm graphisch und beweist, dass die gefundene Lösung optimal ist:

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 7x_2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und seien $b, c \in \mathbb{R}^n$. Was könnt Ihr über die Lösung des linearen Programms

$$\begin{aligned} \max c^t x \\ Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

aussagen.

Aufgabe 7 (4 + 2 + 4 + 6 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass jedes lineare Programm auf die Normalform

$$\begin{aligned} \max c^t x \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{aligned}$$

gebracht werden kann. Natürlich ist jede Aussage zu begründen.

a) Seien $\bar{A}, \tilde{A}, \hat{A}$ Matrizen und $\bar{b}, \tilde{b}, \hat{b}$ Spaltenvektoren mit mit reellen Einträgen und geeigneten Dimensionen. Stellt die Menge $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{A}x \ge \bar{b}, \tilde{A}x = \tilde{b}, \hat{A}x \le \hat{b}\}$ in der Form $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ dar.

b) Seien $x, b, c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigt, wie man ein lineares Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

auf ein äquivalentes lineares Programm in Normalform überführen kann.

c) Tranformiert ein lineares Programm mit oberen und unteren Schranken

$$\begin{aligned} &\min c^t x \\ &Ax \leq b \\ &l_i \leq x_i \leq u_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

auf Normalform (Hinweis: Ersetzt jedes x_i durch $x_i' + l_i$).

d) Betrachtet ein lineares Programm (LP1) in unbeschränkten Variablen

$$\begin{aligned} \max c^t x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ersetzt jedes x_i durch $x_i^+ - x_i^-$ mit $x_i^+, x_i^- \geq 0$, um ein lineares Programm (LP2) in Normalform

$$\begin{aligned} \max c^t x^+ - c^t x^- \\ Ax^+ - Ax^- \leq b \\ x^+, x^- \geq 0 \end{aligned}$$

zu erhalten. Zeigt, dass (LP1) und (LP2) im folgenden Sinne äquivalent sind:

(LP1) besitzt genau dann eine Lösung mit Zielfunktionswert $z \in \mathbb{R}$, wenn (LP2) eine Lösung mit Wert z besitzt (Hinweis: Überlegt Euch, wie Ihr eine Lösung von (LP1) in eine Lösung von (LP2) mit gleichem Zielfunktionswert transformieren könnt und umgekehrt).

Programmieraufgabe 1

Zur Information: Eure erste Programmieraufgabe wird darin bestehen, den Simplex–Algorithmus in Java zu implementieren. Nähere Details und die konkrete Aufgabenstellung folgen auf dem nächsten Übungsblatt.