Universität Dortmund **SS 2006**
Fachbereich Mathematik, Lehrstuhl V
Numerische Algorithmen / Numerische lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

3. Übungsblatt: Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Abgabe: 26.04.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Eine Elektrofirma hat einen Vertrag abgeschlossen, in dem sie sich verpflichtet in den nächsten vier Wochen 20000 Radios auszuliefern. Der Auftraggeber bezahlt für jedes Radio, dass bis zum Ende der i. Woche ($i = 1, \ldots, 4$) ausgeliefert wird (22-i) €. Für zuviel hergestellte Radios gibt es kein Geld.

Zur Zeit hat die Firma 40 *erfahrene* Mitarbeiter, die jeweils 50 Radios pro Woche herstellen können, so dass die Firma vorübergehend *neue* Mitarbeiter einstellen muss, um den Auftrag zu erfüllen. Neue Mitarbeiter können am Anfang jeder Woche eingestellt werden und bleiben bis zum Ende der vierten Wochen in der Firma beschäftigt. Jeder erfahrene Mitarbeiter kann in einer Woche entweder Radios produzieren oder maximal drei neue Mitarbeiter ausbilden. Während der eine Woche dauernden Ausbildung produzieren die neuen Mitarbeiter genau wie ihre Ausbilder keine Radios. Am Ende einer Woche werden neue zu erfahrenen Mitarbeitern.

Erfahrene Mitarbeiter bekommen wöchentlich 200 € und neue Mitarbeiter 100 €. Die Herstellungskosten eines Radios betragen neben dem Gehalt der Mitarbeiter 5 €. Die Firma möchte natürlich maximalen Profit aus diesem Auftrag herausholen, da sie zur Zeit keine weiteren Aufträge hat. Formuliert dieses Problem als lineares Programm.

Aufgabe 9 ($5 + 2$ Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $c, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ Spaltenvektoren.

Beweist: Ist das lineare Programm $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ unbeschränkt, so existiert ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass das lineare Programm $\max\{x_k \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ebenfalls unbeschränkt ist.

Gilt auch die Rückrichtung? Begründet Eure Antwort.

Aufgabe 10 ($3 + 3 + 4$ Punkte)

Die Größe y sei eine Funktion einer anderen Größe x. Es wird vermutet, dass ein linearer bzw. quadratischer Zusammenhang zwischen x und y besteht. Für $i = 1, \ldots, n$ wurden Wertepaare (x_i, y_i) beobachtet. Modelliert die folgenden Probleme jeweils als lineares Programm.

a) Findet die „beste“ Gerade $y = ax + b$ zu den gegebenen Wertepaaren, so dass die Summe der Abweichungen zwischen den beobachteten Werten von y und den durch die Geradengleichung vorhergesagten Werten für y minimal ist.

b) Findet die „beste“ Gerade, so dass die maximale Abweichung zwischen beobachteten und vorhergesagten Werten für y minimal ist.

c) Findet die „besten“ quadratischen Funktionen $y = ax^2 + bx + c$, so dass die Zielkriterien von a) bzw. b) minimiert werden.

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Löst das folgende lineare Programm mit Hilfe des Simplex–Algorithmus:

$$\begin{aligned} \max 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Verwendet beim Basiswechsel immer diejenige Variable mit positiven reduzierten Kosten, die den kleinsten Index hat.

Programmieraufgabe 1, Teil 1

Die erste Programmieraufgabe wird darin bestehen, den Simplex–Algorithmus zum Lösen linearer Programme zu implementieren. In Teil 1 sollt Ihr ein Programm schreiben, welches ein lineares Programm aus einer Datei ausliest, das Tableau für dieses LP erstellt und testet, ob Phase I des Simplex–Algorithmus notwendig ist. Nähere Informationen dazu findet Ihr auf der Homepage dieser Vorlesung.