Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

5. Übungsblatt: Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Abgabe: 10.05.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 15 (6 + 4 + 6 Punkte)

Betrachtet das folgende Fahrrad–Problem: n Personen wollen von Ort A nach Ort B gelangen, die 20km auseinander liegen. Dabei steht ihnen genau ein Fahrrad zur Verfügung, mit dem aber zu jeder Zeit höchstens eine Person fahren kann. Person j hat die Gehgeschwindigkeit g_j und erreicht auf dem Fahrrad die Geschwindigkeit f_j. Die Aufgabe ist, die Ankunftszeit der letzten Person zu minimieren. Dazu soll unter anderem das folgende lineare Programm verwendet werden:

$$
\begin{array}{lrlr}
\min & t & & (1)\\
\text{s.t.} & t - x_j - x'_j - y_j - y'_j \geq 0 & (1 \leq j \leq n) & (2)\\
& t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y'_j \geq 0 & & (3)\\
& g_j x_j - g_j x'_j + f_j y_j - f_j y'_j = 20 & (1 \leq j \leq n) & (4)\\
& \sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{j=1}^{n} f_j y'_j \leq 20 & & (5)\\
& x_j, x'_j, y_j, y'_j \geq 0 & (1 \leq j \leq n) & (6)
\end{array}
$$

a) Beweist, dass der Optimalwert des linearen Programms eine untere Schranke für die Ankunftszeit der letzten Person ist (Hinweis: Zeigt unter anderem, dass jede zulässige Lösung des Fahrrad–Problems einer zulässigen Lösung des linearen Programms entspricht).

b) Überlegt Euch, warum der Optimalwert des linearen Programms nur eine untere Schranke ist. Konstruiert ein Beispiel, so dass der Optimalwert des linearen Programms echt kleiner ist als die minimale Ankunftszeit der letzten Person.

c) Versucht, eine optimale Lösung des Fahrrad–Problems für $n = 3$ und folgende Daten zu finden.

j	1	2	3
g_j	4	4	8
f_j	24	24	32

Zeigt mit Hilfe des linearen Programms, dass Eure Lösung wirklich optimal ist. (Hinweis: Vereinfacht das lineare Programm aufgrund der speziellen Probleminstanz. Warum fährt Person 3 zum Beispiel niemals vorwärts mit dem Fahrrad?)

Aufgabe 16 (4 + 2 Punkte)

Betrachtet das folgende Problem: Gegeben sei ein Polyeder $P := \{x \mid Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Entscheide, ob P ein Polytop ist oder nicht. Zeigt, wie man dieses Problem mit Hilfe der linearen Optimierung lösen kann.

Könnt Ihr das Problem auf die Lösung genau eines linearen Programms zurückführen?

Aufgabe 17 (8 Punkte)

Aus der Vorlesung wissen wir, dass Vektoren $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ genau dann *affin abhängig* heißen, wenn es ein $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt, so dass $x_k \in \text{aff}(\{v_i \mid i \in \{0, \dots, n\} \setminus \{k\})$ gilt. Die Vektoren heißen *affin unabhängig*, wenn sie nicht affin abhängig sind. Zeigt die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $v_0, v_1, \dots, v_n$ sind affin unabhängig.

(ii) $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ sind linear unabhängig.

(iii) $\begin{pmatrix} v_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

(iv) Für $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ folgt aus $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$, dass $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt.

Programmieraufgabe 1, Teil 3

Erweitert Euer Programm um Phase I des Simplexalgorithmus. Nähere Informationen dazu findet Ihr auf der Homepage dieser Vorlesung.