

Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

7. Übungsblatt:
Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra
(Lineare Optimierung)

Abgabe: 24.05.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 22 (3 + 3 + 4 Punkte)

Betrachtet das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{llllll} \min & x_1 & & +x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +2x_2 & & \leq & 5 \\ & & & x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array} \quad (\text{LP})$$

- a) Löst das gegebene LP.
- b) Ermittelt das zu (LP) duale Programm (D).
- c) Ermittelt die Bedingungen des komplementären Schlupfes für das Problem und löst damit (D).

Aufgabe 23 (6 Punkte)

Ist der Punkt $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung des folgenden LPs?

$$\begin{array}{ll} \max & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Beantwortet die Frage mit Hilfe der Bedingungen des komplementären Schlupfes.

Aufgabe 24 (8 Punkte)

Betrachtet die beiden folgenden Probleme:

- Finde zu einem gegebenen LP eine zulässige Lösung oder stelle fest, dass es keine gibt.
- Finde zu einem gegebenen LP eine optimale Lösung oder stelle fest, dass es keine gibt.

Zeigt, dass die beiden Probleme gleich schwer sind, d.h.: kennt man einen (beliebigen) Algorithmus, der das eine löst, so kann man damit auch das andere lösen.

Aufgabe 25

(3 Punkte)

Gegeben sei das LP $\max c^T x$, s.t. $Ax \leq b$.

Zeigt: Existiert für jede Zeile A_i von A ein x^i mit $Ax^i \leq b$ und $A_i x^i < b_i$, so gibt es auch ein x mit $Ax < b$.

Aufgabe 26

(3 Punkte)

Was ist an der folgenden Argumentation falsch?

Es gilt (durch Anwendung von Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{aligned}
 \max \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \min \{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} \\
 &\leq \max \{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} \\
 &\leq \min \{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} \\
 &\leq \max \{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} \\
 &\leq \min \{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} \\
 &\leq \max \{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} \\
 &\leq \min \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} \\
 &\leq \max \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}
 \end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.