Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

8. Übungsblatt: Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Abgabe: 31.05.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 27 ($2+2+2+2+2+4$ Punkte)
Zeigt: Für $S, S_i \subseteq \mathbb{K}^n, i = 1, ..., k$ gilt:

a) $S_i \subseteq S_j \Rightarrow S_j^\circ \subseteq S_i^\circ$

b) $S \subseteq S^{\infty}$

c) $\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^k S_i^\circ$

d) $S^\circ = \text{cone}(S^\circ) = (\text{cone}(S))^\circ$

e) $S = \text{lin}(S) \Rightarrow S^\circ = S^\perp$ Gilt die Umkehrung?

f) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{K}^n$ gilt

 (i) $S^\circ = S^{\circ\circ\circ}$

 (ii) $S = S^\circ$?

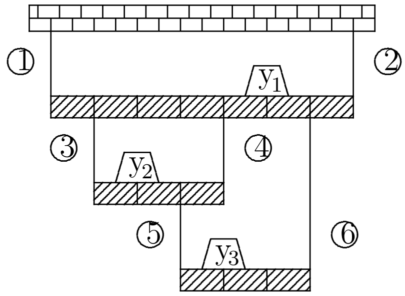
Aufgabe 28 ($4+4$ Punkte)
Sei $S \neq \phi$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $x^* \notin S$. Zeigt, dass folgendes gilt:

a) Betrachte eine beliebige Norm $\parallel . \parallel$. Zeigt, dass $d := \min \{\parallel x^* - y \parallel \mid y \in S\}$ existiert.

b) Sei $y \in S$ ein Punkt mit $\parallel x^* - y \parallel = d$, sei $c := x^* - y$ und $\gamma := (x^* - y)^T y$.
Zeigt, dass für $H := \{x \mid c^T x = \gamma\}$ folgendes gilt:
$\forall x \in S : c^T x \leq \gamma$ und $c^T x^* > \gamma$ (d.h. H ist eine trennende Hyperebene)

Aufgabe 29 (8 Punkte)

Betrachte das folgende Hängegerüst.



Die Kabel 1 und 2 können je 300 kg Last, die Kabel 3 und 4 je 100 kg und die Kabel 5 und 6 jeweils 50 kg Last tragen. Unter Vernachlässigung des Gewichtes der Kabel und der Bohlen soll das maximal zulässige Gesamtgewicht $y_1 + y_2 + y_3$ für die Lasten gefunden werden. Formuliere das Problem als lineares Programm und findet eine optimale Lösung. Hinweis: Beachtet, dass z.B. das Gewicht y_3 Kabel 5 zu 2/3 und Kabel 6 zu 1/3 belastet.