Prof. Dr. Martin Skutella
Ronald Koch, Alexia Weber

9. Übungsblatt: Numerische Algorithmen / Numerische Lineare Algebra (Lineare Optimierung)

Abgabe: 07.06.2006, 10:00 Uhr (Briefkasten)

Aufgabe 30 (10 + 8 Punkte)

Ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ ist ein geordnetes Paar aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $A := \{(u, v) \mid u, v \in V\}$, d.h. eine Kante (u, v) verläuft von Knoten u nach v.

a) Sei $G = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V, s \neq t$ (s bezeichnet die Quelle und t die Senke).
Für $S \subseteq V$ schreibe $\delta^+(S) := \{a = (u, v) \in A \mid u \in S, v \notin S\}$.
Analog ist $\delta^-(S) := \{a = (v, u) \in A \mid u \in S, v \notin S\}$.
Es sei außerdem eine Funktion $c : A \to \mathbb{R}^+$ gegeben, die jeder Kante eine nichtnegative Kapazität zuweist. Ein *s-t-Fluss* für (G, c) ist eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}^+$, so dass

$$0 \leq f(a) \leq c(a) \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad \sum_{a \in \delta^+(\{v\})} f(a) = \sum_{a \in \delta^-(\{v\})} f(a) \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\},$$

Die zweite Gleichung sagt, dass das, was in einen Knoten v hineinfließt, auch wieder herausfließt (außer für s und t). Ziel ist es nun, einen maximalen s-t-Fluss zu finden, d.h. einen Fluss, der den *Flusswert*

$$\sum_{a \in \delta^+(\{s\})} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(\{s\})} f(a)$$

maximiert. Formuliere dies als lineares Programm und bestimme das duale Programm dazu.

b) Die Kantenmenge $\delta^+(S)$ heißt *s-t-Schnitt*, wenn $s \in S, t \notin S$. Die *Kapazität* eines s-t-Schnitts $\delta^+(S)$ ist

$$c(S) := \sum_{a \in \delta^+(S)} c(a)$$

Beweist mit Hilfe von Dualitätstheorie und komplementärem Schlupf, dass der maximale Flusswert von (G, c) gleich der minimalen Kapazität eines s-t-Schnitts ist.

Aufgabe 31 (6 Punkte)

Es sei Q Teilmenge eines Polyeders $P = P(A, b)$. Zeige, dass $\mathrm{fa}\big(\mathrm{eq}(Q)\big)$ die bezüglich Mengeninklusion kleinste Seitenfläche ist, die Q enthält.

Aufgabe 32 (6 Punkte)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und F eine nichttriviale Seitenfläche von P mit $F = \{x \in P \mid c^T x = \gamma\}$ für $c \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x \leq \gamma\} \quad \dot{\vee} \quad P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x \geq \gamma\}$$